Να λυθεί το γραμμικό σύστημα.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Προφανώς $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

και $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ επί $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ενα συστημα 3x3 είναι το μόνο εύκολο να λυθεί αλλά εμείς θέλουμε να λύνουμε και συστήματα πχ 20x20 με μια μέθοδο.

(Πρώτον, εξετάζουμε εαν το σύστημα έχει μοναδική ρίζα. Εξετάζουμε εαν $\exists A^{-1} \Longrightarrow$ το συστημα εχει μοναδική ρίζα την $x = A^{-1} \cdot b$. Αλλά, απο γραμμική άλγεβρα ξέρουμε $\{A^{-1}$ υπάρχει $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) = n \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ το 0 όχι ιδιοτιμή του $A\}$.

Για να υπολογίσουμε όμως το A^{-1} είναι μια επίπονη διαδικασία και αν θέλουμε να την κάνουμε πρέπει να λύσουμε n-συστήματα.)

ΞΕΚΙΝΑΜΕ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ GAUSS.

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \to -\frac{1}{3}\Gamma_3} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$$

ΔΗΛ.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -3x_2 - x_3 &= -2 \\ -\tfrac{1}{3}x_3 &= -\tfrac{2}{3} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= -1 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

LU-ΑΝΑΛΥΣΗ

γι. πολ/σαμε με 2

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

άρα

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

άρα το σύστημα θα γίνει:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} y_1 = 1 \\ 2y_1 + y_2 = 0 \\ y_1 - \frac{1}{3}y_2 + y_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -2 \\ y_3 = \frac{2}{3} \end{cases}$$